TD 3 : Réduction des matrices carrées

Exercice 1 : Pour les matrices suivantes, calculer les valeurs propres, une base de chaque sous-espace propre. Dans le cas où A est diagonalisable, diagonaliser A puis calculer A^n où $n \in \mathbb{N}$.

1) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 5) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 6) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 2 : Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$. A toute fonction polynômiale P de E, on associe $u(P) = P' - P$.
1. Montrer que u est un endomorphisme de E.
2. Déterminer la matrice A de u dans la base canonique de E.
3. Déterminer les valeurs propres de A et une base de chaque sous-espace propre associé. A est-elle diagonalisable ?

Exercice 3 : Soit la matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Déterminer les valeurs propres de C. Pourquoi est-elle inversible ? Pourquoi C est-elle diagonalisable ?
2. Déterminer les sous-espaces propres associés à C. Diagonaliser C. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer C^n .

Exercice 4 : Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$.
1. Montrer qu'il existe au moins un vecteur e de $\mathbb{R}^3$ tel que la famille $(f^2(e), f(e), e)$ soit une base de $\mathbb{R}^3$. Quelle est la matrice A de f dans cette base ?
2. Quels sont les valeurs propres et les vecteurs propres de A ? A est-elle diagonalisable ?

Exercice 5 : Soient $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -9 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}$ et pour tout x réel, $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$.
1. (a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$. Calculer $P(A)$.
   (b) Déduire des calculs précédents les éventuelles valeurs propres de A.
2. Déterminer si les réels mis en évidence à la question précédente sont effectivement des valeurs propres de A en recherchant des vecteurs propres associés à ces valeurs. (On prendra, si c'est le cas, des vecteurs propres tels que les troisièmes coordonnées soient égales à 1).
3. La matrice A est-elle diagonalisable ? Si oui, donner une matrice P et son inverse P^{-1} telles que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Exercice 6 : Les matrices $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont-elles diagonalisables ? Inversibles ?

Exercice 7 :

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 0, u_1 = 1, u_2 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n \end{cases}$. On pose, $\forall n \in \mathbb{N}, X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$

1. Trouver la matrice A telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = AX_n$.
2. Montrer que $Sp(A) = \{1,2,3\}$ et trouver une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.
3. En déduire la valeur de A^n pour tout entier naturel n.
4. Expliciter X_n en fonction de X_0. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$, la valeur de u_n en fonction de n.

Exercice 8 : Un signal lumineux se déplace entre trois points A, B et C :

S'il est en A, la probabilité qu'il se déplace en B est égale à $\frac{1}{4}$ et celle qu'il se déplace en C est égale à $\frac{3}{4}$.

S'il est en B, la probabilité qu'il se déplace en A est égale à $\frac{1}{4}$ et celle qu'il se déplace en C est égale à $\frac{3}{4}$.

S'il est en C, la probabilité qu'il se déplace en A est égale à $\frac{1}{4}$ et celle qu'il se déplace en B est égale à $\frac{3}{4}$.

Si $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n (respectivement B_n et C_n) l'événement « le signal est en A (respectivement en B et en C) après le $n^{\text{ème}}$ déplacement ».

Si $n = 0$, on note A_0 (respectivement B_0 et C_0) l'événement « le signal est en A (respectivement en B et en C) avant le premier déplacement ». Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $X_n = \begin{pmatrix} p(A_n) \\ p(B_n) \\ p(C_n) \end{pmatrix}$.

1. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = MX_n$ où $M = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. On pose $N = {}^tM$.

2. Montrer que les valeurs propres de N sont $1, -\frac{3}{4}$ et $-\frac{1}{4}$.

3. Déterminer une matrice P inversible telle que $P^{-1}NP = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

4. (a) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}, N^n = PD^nP^{-1}$, où D est la matrice diagonale de la question 3).
   (b) Calculer alors N^n pour tout entier naturel n.
   (c) En déduire la valeur de M^n pour $n \in \mathbb{N}$.
5. On suppose qu'avant le premier déplacement, le signal est en A.
   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $p(A_n), p(B_n), p(C_n)$ en fonction de n.
   (b) Déterminer alors les limites de ces suites lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 9 : D'après EM Lyon 2008

On considère les matrices carrées d'ordre trois suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.
2. En déduire une matrice carrée P d'ordre trois, inversible, de deuxième ligne $(-1 \ \ 1 \ \ 1)$, telle que $A = PDP^{-1}$ et calculer P^{-1}.
3. Calculer la matrice $C = P^{-1}BP$ et vérifier que C est diagonale.

Exercice 10 : D'après HEC

L'objectif de l'exercice est l'étude des endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ vérifiant l'équation (E) : $f \circ f = 4Id$.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Soit u le vecteur de $\mathbb{R}^2$ défini par $u = (\sqrt{2} - 2; \sqrt{2})$.

1. Montrer que f vérifie l'équation (E) et déterminer le noyau et l'image de f.
2. (a) Montrer que $G = Im(f - 2Id)$ est engendré par u.
   En déduire la dimension de $F = Ker(f - 2Id)$ et donner une base de F.
   (b) Vérifier que G est le sous-espace propre de f associé à la valeur propre -2.
3. Montrer que f est diagonalisable : préciser les valeurs propres de f et donner la matrice de passage de la base canonique à une base de vecteurs propres.

Exercice 11 : D'après ECRICOME

Dans tout l'exercice, $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels. On notera respectivement I_3 et 0_3 la matrice identité et la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Soit F l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de la forme $\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$, où a et b sont des réels quelconques. Soit G l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = M$.

Partie I

1. F est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? Si oui, déterminer une base de F et préciser la dimension de F.
2. G est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? Si oui, déterminer une base de G et préciser la dimension de G.
3. Soit $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

   (a) Démontrer que $A \in F \cap G$.

   (b) En déduire un polynôme annulateur de A.

   (c) Déterminer les valeurs propres de A, et donner une base de chaque sous-espace propre associé.

   (d) La matrice A est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?

Partie II

On considère dans cette partie une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ de F avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

4. (a) Démontrer que : $M \in G \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 2b^2 = a \\ b(b + 2a - 1) = 0 \end{cases}$

   (b) Montrer alors que : $F \cap G = \{I_3, 0_3, A, I_3 - A\}$.
5. On note $B = I_3 - A$. Démontrer que la famille (A, B) est une base de F.
6. (a) On note $\alpha = a - b$ et $\beta = a + 2b$. Vérifier que : $M = \alpha A + \beta B$.

   (b) Calculer AB et BA.

   (c) Montrer que pour tout entier naturel n : $M^n = \alpha^n A + \beta^n B$.
7. (a) Montrer que M est inversible si et seulement si $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$.

   (b) Si α et β sont deux réels non nuls, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $M^{-n} = \alpha^{-n} A + \beta^{-n} B$.

Partie III

Soient $T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. On considère la suite (X_n) de matrices colonnes définie par $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = TX_n + Y$.

8. Calculer la matrice $I_3 - T$ et exprimer cette matrice en fonction de A et B.
9. À l'aide de la question 7, calculer la matrice $(I_3 - T\,)^{-1}$.
10. Démontrer qu'il existe une unique matrice colonne L, que l'on déterminera, telle que : $L = TL + Y$.
11. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $X_{n+1} - L = T(X_n - L)$, puis que : $\forall n \in \mathbb{N}, X_n - L = T^n(X_0 - L)$.
12. Pour tout entier naturel n, exprimer X_n en fonction de A, B, L, X_0 et n.

Exercice 12 : D'après HEC

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes à coefficients réels et $\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont tous égaux à 0 ou 1.

1. <u>Exemple 1</u> : Soit A la matrice de $\mathcal{B}_2(\mathbb{R})$ définie par $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

   (a) Calculer la matrice A^2.

   (b) Quelles sont les valeurs propres de A ?

   (c) La matrice A est-elle diagonalisable ?

2. <u>Exemple 2</u> : Soit B la matrice de $\mathcal{B}_3(\mathbb{R})$ définie par $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On considère les instructions et la sortie `(-->) Python` suivantes :

```
import numpy as np
import numpy.linalg as al
B=np.array([[0,1,0],[1,0,0],[0,0,1]])
P=np.array([[1,1,0],[1,-1,0],[0,0,1]])
np.dot(al.inv(P),np.dot(B,P))
-->
[[1.  0.   0.]
 [0. -1.   0.]
 [0.  0.   1.]]
```

   (a) Déduire les valeurs propres de B de la séquence `Python` précédente.

   (b) Déterminer une base de chacun des sous-espaces propres de B.

3. (a) Combien existe-t-il de matrices appartenant à $\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$?

   (b) Combien existe-t-il de matrices appartenant à $\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$ dont chaque ligne et chaque colonne comporte exactement un coefficient égal à 1 ?

4. Dans cette question, n désigne un entier supérieur ou égal à 2.

   Soit E un espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme de E. On note :

   - id l'endomorphisme identité de E ;
   - F le noyau de l'endomorphisme $u - id$ et G le noyau de l'endomorphisme $u + id$;
   - p la dimension de F et q la dimension de G.

   On suppose que $u \circ u = id$.

   (a) Justifier que l'image de $u - id$ est incluse dans F.

   (b) En déduire l'inégalité : $p + q \geq n$.

On suppose désormais que $0 \leq p < q$. *Soit* $(f_1, f_2, \dots, f_p)$ *une base de F et* $(g_1, g_2, \dots, g_q)$ *une base de G.*

   (c) Justifier que $(f_1, f_2, \dots, f_p, g_1, g_2, \dots, g_q)$ est une base de E.

   (d) Calculer $u(g_1 - f_1)$ et $u(g_1 + f_1)$.

   (e) Trouver une base de E dans laquelle la matrice de u appartient à $\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$.