

Chapitre VI : LES GRAPHS

I- Définitions

Définition 1 : On appelle **graphe non orienté** la donnée d'un ensemble de points, les **sommets** du graphe, et d'un ensemble de lignes, les **arêtes** du graphe, qui relient certains sommets entre eux.

Le nombre de sommets d'un graphe est l'**ordre** du graphe.

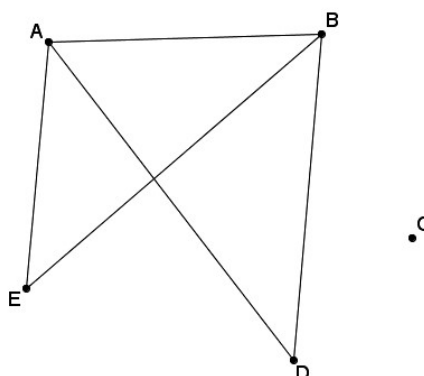
Deux sommets reliés entre eux par une arête sont **adjacents**.

Le **degré d'un sommet** est le nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité.

Un sommet qui n'est adjacent à aucun autre est un **sommet isolé**.

Un graphe est dit **simple** si au plus une arête relie deux sommets et s'il n'y a pas de boucle sur un sommet.

Exemple 1 : On considère le graphe G ci-dessous :



Le graphe a 5 sommets : l'**ordre** de G est 5. Il est **simple**.

Les sommets E et D ne sont pas **adjacents**.

Le sommet C est un **sommet isolé**.

Tableau des **degrés** des sommets du graphe :

Sommet	A	B	C	D	E
Degré	3	3	0	2	2

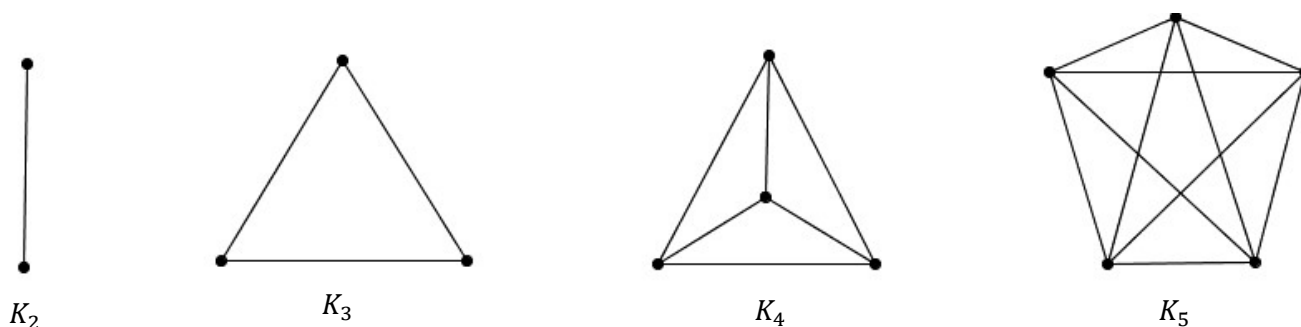
Définition 2 : Soit G un graphe non orienté.

Le graphe G est dit **complet** si deux sommets quelconques distincts du graphe sont toujours adjacents.

Autrement dit : tous les sommets sont reliés deux à deux par une arête.

Exemple 2 :

Les graphes ci-dessous sont des graphes **complets** d'ordre 2, 3, 4 et 5 communément appelés K_2 , K_3 , K_4 , K_5 en hommage au mathématicien polonais Kazimierz Kuratowski qui a beaucoup apporté à la théorie des graphes.



Propriété 1 : La somme des degrés des sommets dans un graphe non orienté est égale au **double du nombre d'arêtes**.

Conséquence : Le nombre de sommets de degré impair est donc nécessairement pair.

II- Parcours dans les graphes – Matrice associée

1) Chaînes et cycles

Définition 3 : Considérons un graphe non orienté

Une **chaîne** est une succession d'arêtes telle que l'extrémité de chacune (sauf la dernière) est l'origine de la suivante.

Le **nombre d'arêtes** qui composent une chaîne est appelée la **longueur de la chaîne**.

Une **chaîne fermée** est une chaîne dont l'origine et l'extrémité coïncident.

Un **cycle** est une chaîne fermée dont les arêtes sont toutes distinctes.

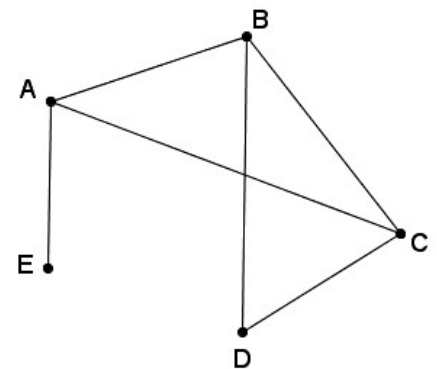
Exemple 3 : Dans le graphe ci-contre :

E – A – C – B – D est une **chaîne** de longueur 4.

E – A – B – C – A – E est une **chaîne fermée** de longueur 5.

Ce n'est pas un cycle car l'arête entre A et E est parcourue deux fois.

D – B – A – C – D est un **cycle** de longueur 4.



2) Matrice associée à un graphe

Définition 4 : Soit G un graphe non orienté d'ordre n .

On numérote les sommets de G de 1 à n .

On appelle matrice d'adjacence associée à G la matrice A dont chaque terme a_{ij} est égal au nombre d'arêtes reliant les sommets i et j (pour tout $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$).

Exemple 4 : La matrice d'adjacence associée au graphe de l'exemple précédent est, en supposant les sommets classés dans l'ordre alphabétique :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarque 1 : Dans le cas d'un graphe non orienté, une telle matrice est nécessairement symétrique.

Propriété 2 : Soit G un graphe non orienté d'ordre n et A sa matrice d'adjacence.

On suppose que les sommets de G sont numérotés de 1 à n .

Le terme $a_{ij}^{(k)}$ à l'intersection de la i -ème ligne et j -ème colonne de la matrice A^k ($k \in \mathbb{N}^*$) est le nombre de chaînes de longueur k reliant le sommet i au sommet j .

Exemple 5 :

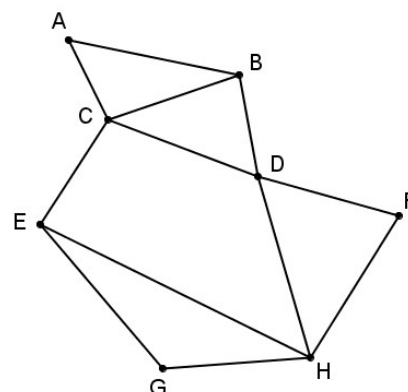
Un orchestre doit effectuer une tournée passant par les villes A, B, C, D, E, F, G et H en utilisant le réseau autoroutier.

Le graphe G ci-contre représente les différentes villes de la tournée et les autoroutes reliant ces villes (une ville est représentée par un sommet et une autoroute par une arête).

Notons M la matrice d'adjacence associée au graphe G (les sommets sont pris dans l'ordre alphabétique)

On donne la matrice M^3 :

$$M^3 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 & 2 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 6 & 7 & 3 & 2 & 2 & 3 \\ 6 & 6 & 4 & 9 & 7 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 9 & 4 & 3 & 5 & 3 & 8 \\ 1 & 3 & 7 & 3 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 2 & 2 & 3 & 5 & 3 & 2 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 4 & 2 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 8 & 7 & 5 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$



Le nombre de chaînes de longueur 3 reliant E à F est de 3.

Ces chaînes sont :

E – C – D – F

E – H – D – F

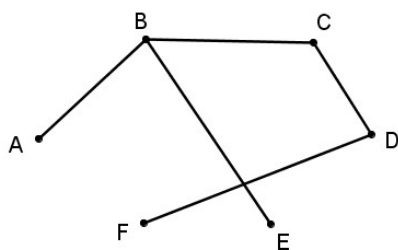
E – G – H – F

III- Parcours eulériens

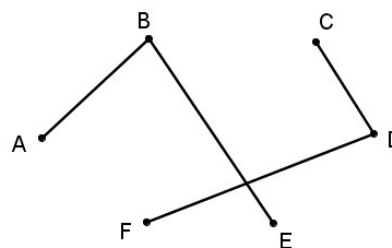
1) Connexité

Définition 5 : Un graphe G est **connexe** si deux sommets quelconques de G sont toujours reliés par une chaîne.

Exemple 6 :



Graphe n°1



Graphe n°2

Le graphe n°1 est connexe mais pas le graphe n°2 : en effet les sommets E et F ne peuvent être reliés par une chaîne.

Remarque 2 :

Dans le graphe n°1, l'arête B – C est appelée un **isthme**. Sa suppression dans le graphe n°1 « déconnecte » le graphe (et donne le graphe n°2).

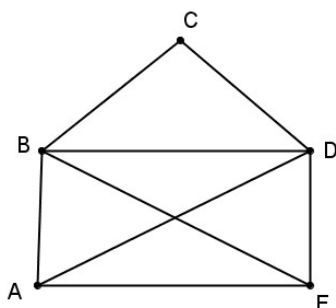
2) Chaînes et cycles eulériens

Définition 6 :

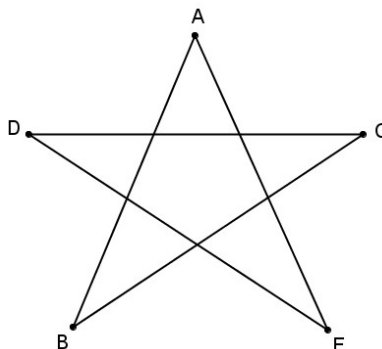
On appelle **chaîne eulérienne** d'un graphe G toute chaîne qui contient **une fois et une seule** chaque arête du graphe G .

On appelle **cycle eulérien** toute chaîne eulérienne **fermée**.

Exemple 7 :



Graphe n°3



Graphe n°4

Dans le graphe n°3, $A - B - C - D - A - E - B - D - E$ est une chaîne eulérienne (parmi d'autres).

Dans le graphe n°4, $A - B - C - D - E - A$ est un cycle eulérien (parmi d'autres).

Théorème d'Euler : Soit G un graphe connexe.

G admet une **chaîne eulérienne** si et seulement si le **nombre de sommets de degré impair dans G est 0 ou 2**.

Propriété 3 : Conséquence

Un graphe connexe G admet un **cycle eulérien** si et seulement si tous les sommets de G sont de **degré pair**.

Si le graphe connexe a deux sommets de degré impair, ce sont les extrémités de la chaîne eulérienne.

Un graphe ayant plus de deux sommets de degré impair ne possède pas de chaîne eulérienne.

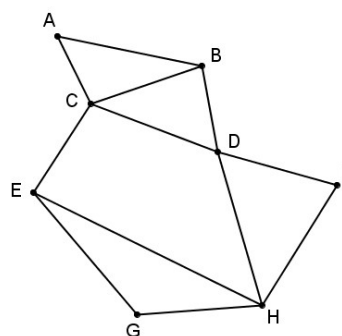
Exemple 8 :

Reprenons le graphe de l'exemple 5.

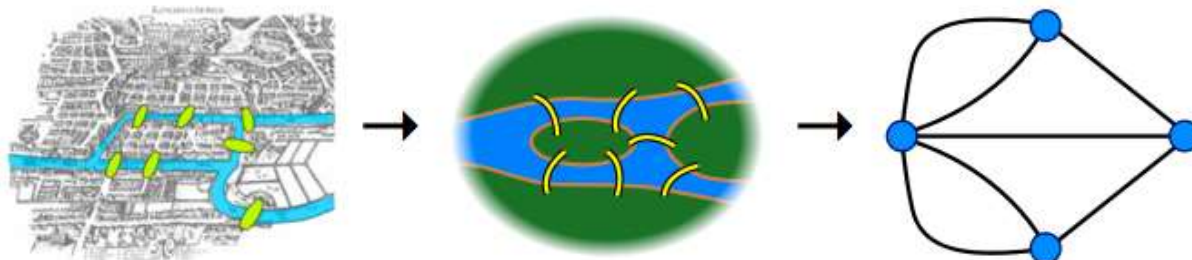
Il ne compte que deux sommets de degrés impairs : B et E .

On peut donc donner une chaîne eulérienne reliant B à E :

$B - A - C - E - G - H - F - D - B - C - D - H - E$



Exemple 9 : Les 7 ponts de Königsberg



Le graphe obtenu a 4 sommets de degré impair, il ne contient donc pas de chaîne eulérienne.

IV- Graphes orientés

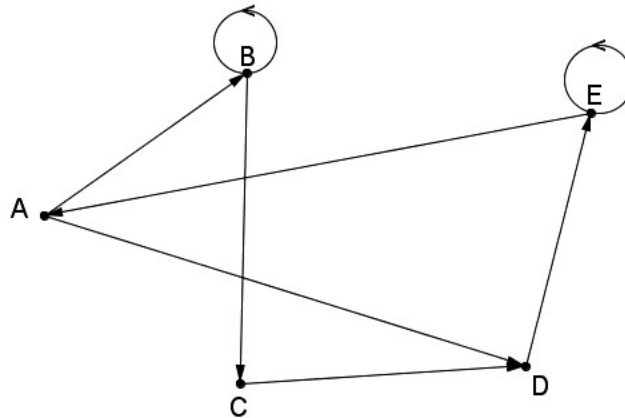
1) Définitions

Définition 7 : Un graphe est **orienté** si ses arêtes ne peuvent être parcourues que dans un sens. L'orientation des arêtes est indiquée par des flèches sur les arêtes.

Une arête orientée est aussi appelée un **arc**.

Une **boucle** est un arc dont l'origine et l'extrémité coïncident.

Exemple 10 : On considère le graphe G ci-dessous :



Le graphe G est orienté d'ordre 5. Il y a une boucle sur les sommets B et E.

A – B – B – C – D est une chaîne de longueur 4.

A – D – E – A est un cycle de longueur 3.

A – B – C – D – E – A est un cycle de longueur 5.

Tableau des **degrés** des sommets du graphe :

Sommet	A	B	C	D	E
Degré	3	4	2	3	4

Remarque 3 :

Une boucle compte deux fois pour le calcul du degré d'un sommet (une fois pour l'origine et une autre fois pour l'extrémité).

On peut parler de **degré entrant** pour le nombre d'arcs dirigés vers le sommet et de **degré sortant** pour le nombre d'arcs partant du sommet : le degré du sommet est donc la somme des deux.

On retrouve la propriété des graphes non orientés : la somme des degrés des sommets dans un graphe est égale au **double du nombre d'arêtes**.

2) Matrice d'adjacence d'un graphe orienté

Définition 8 : Soit G un graphe non orienté d'ordre n .

On numérote les sommets de G de 1 à n .

On appelle matrice d'adjacence associée à G la matrice A dont chaque terme a_{ij} est égal au nombre d'arêtes orientées (arcs) allant du sommet i vers le sommet j (pour tout $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$).

Exemple 11 :

La matrice d'adjacence associée au graphe de l'exemple 10 est, en supposant les sommets classés dans l'ordre alphabétique :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque 4 :

- 1) Dans le cas d'un graphe orienté, une telle matrice n'est pas nécessairement symétrique.
- 2) Les éléments de la diagonale correspondent aux boucles.
- 3) Le degré d'un sommet se retrouve en additionnant les coefficients de la ligne **et** de la colonne lui correspondant.

Exemple 12 :

La somme des coefficients de la 2^{ème} ligne et de la 2^{ème} colonne donne 4 et le degré de B est 4.

Remarque 5 :

On admet que les propriétés de A^n vues pour les graphes non orientés restent valables pour les graphes orientés