Chapitre 1 : Fonctions polynômes du second degré

I- Définitions

1) Fonction polynôme

Définition 1 :
Une fonction polynôme du second degré est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des réels et $\boldsymbol{a \neq 0}$.
Les réels a, b et c sont appelés **coefficients** de la fonction polynôme.

Remarque 1 : L'expression « $ax^2 + bx + c$ » est la forme développée de $f(x)$. On l'appelle aussi **trinôme du second degré**.

Exemple 1 :
Les fonctions $x \mapsto 2x^2 - 3x + 5$, $x \mapsto x^2 - 2$ ou encore $x \mapsto -\frac{1}{3}x^2$ sont des fonctions polynômes du second degré. Seul le coefficient a doit être non nul.

2) La forme canonique

Théorème 1 :
Toute fonction polynôme du second degré de forme développée $f(x) = ax^2 + bx + c$ peut s'écrire sous la forme $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ où $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.
Cette nouvelle écriture s'appelle la **forme canonique** de la fonction polynôme.

Exemple 2 :
$f(x) = 3x^2 - 12x + 5 = 3(x^2 - 4x) + 5$
$x^2 - 4x$ est le début d'une identité remarquable. En effet $(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$
Ainsi $x^2 - 4x = (x-2)^2 - 4$
On remplace alors dans $f(x)$:
$f(x) = 3[(x-2)^2 - 4] + 5 = 3(x-2)^2 - 12 + 5 = 3(x-2)^2 - 7$
On obtient ainsi $\alpha = 2$ et $\beta = -7$

Plus rapidement : on utilise les expressions $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$
Ici, $a = 3, b = -12$ et $c = 5$
$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\left(-\frac{12}{2\times3}\right) = -(-2) = 2$ et $\beta = f(2) = 3 \times 2^2 - 12 \times 2 + 5 = -7$
Ainsi $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta = 3(x-2)^2 - 7$

Démonstration du théorème 1 : Puisque $a \neq 0$, il est possible de le factoriser :

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c$$

$x^2 + \frac{b}{a}x$ est le début de l'identité remarquable $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}$

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$$

$$f(x) = a\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = a(x-\alpha)^2 + \beta$$

Remarque 2 :
La forme canonique est très pratique pour déterminer les variations de la fonction ainsi que son minimum ou son maximum.
Dans l'exemple 2 : $f(x) = 3(x-2)^2 - 7$
Comme $3(x-2)^2 \geq 0$ alors $3(x-2)^2 - 7 \geq -7$
La fonction f admet donc pour minimum -7 atteint lorsque $x = 2$.

3) Sens de variation et graphe

Soit f une fonction polynôme du second degré de forme développée $f(x) = ax^2 + bx + c$ et de forme canonique $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ où $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.
Les variations de f dépendent du signe a.

Théorème 2 :
Si $a > 0$, f est strictement décroissante sur $]-\infty;\ \alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha; +\infty[$.
Elle admet pour minimum β atteint lorsque $x = \alpha$. Elle n'admet pas de maximum sur $\mathbb{R}$.

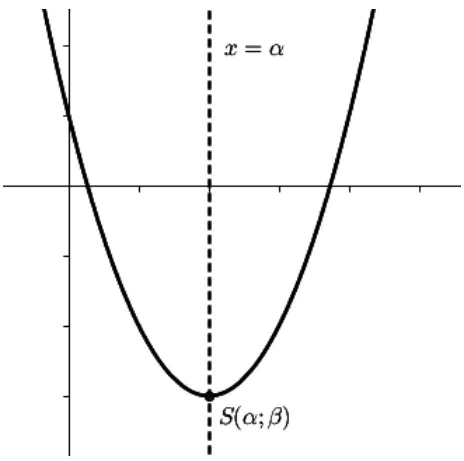
Si $a < 0$, f est strictement croissante sur $]-\infty;\ \alpha]$ et strictement décroissante sur $[\alpha; +\infty[$.
Elle admet pour maximum β atteint lorsque $x = \alpha$. Elle n'admet pas de minimum sur $\mathbb{R}$.

Démonstration du théorème 2 : en exercice

Propriété 1 (admise) :
Dans un repère orthogonal du plan, la courbe représentative de la fonction f est une parabole $\mathcal{P}$ de sommet $S(\alpha;\beta)$. La courbe $\mathcal{P}$ admet pour axe de symétrie la droite d'équation $x = \alpha$.

Si $a > 0$

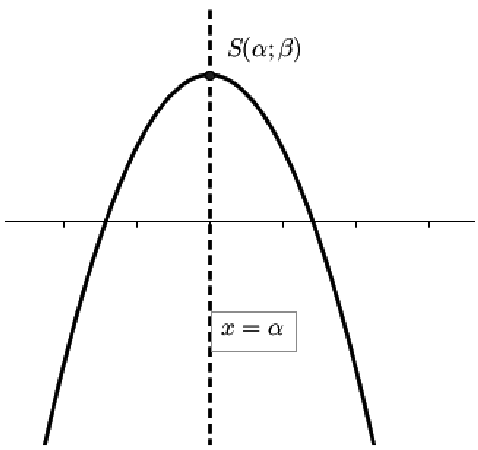
x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	β	$\nearrow$	



La parabole est tournée « vers le haut »

Si $a < 0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	β	$\searrow$	



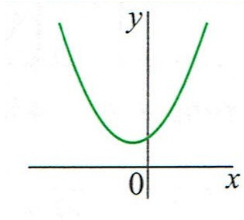
La parabole est tournée « vers le bas »

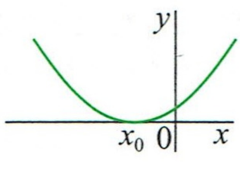
II- Résolution d'équations du second degré

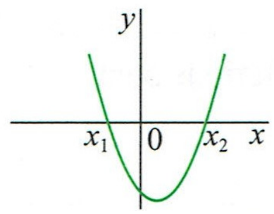
1) Approche graphique

La représentation graphique d'une fonction polynôme du second degré f permet de conjecturer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.

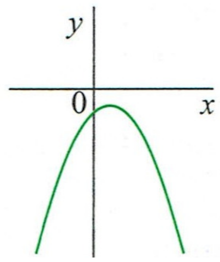
Dans le cas où $a > 0$:

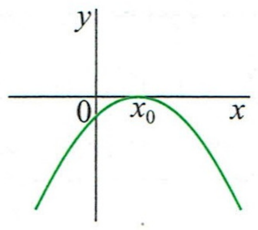


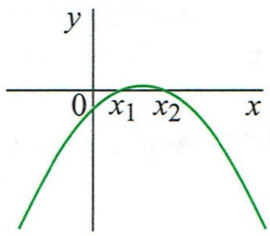




Dans le cas où $a < 0$:







Dans ces 6 exemples, on conjecture zéro, une ou deux solutions.

2) Résolution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ où $a \neq 0$

Définition 2 :
On appelle **discriminant** du trinôme $ax^2 + bx + c$ le réel noté Δ et défini par $\Delta = b^2 - 4ac$.

Théorème 3 :
Le nombre de solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ dépend du signe de Δ :
Si $\Delta < 0$: pas de solution réelle
Si $\Delta = 0$, une seule solution $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$ dite "solution double"
Si $\Delta > 0$, deux solutions distinctes $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

Exemple 3 : Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $2x^2 + 3x - 2 = 0$

$a = 2, b = 3$ et $c = -2$

$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 9 + 16 = 25 > 0$

L'équation a deux solutions $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-3 + 5}{2 \times 2} = \mathbf{\dfrac{1}{2}}$ et $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-3 - 5}{2 \times 2} = \mathbf{-2}$

Démonstration du théorème 3 :

On commence par écrire la forme canonique du trinôme $ax^2 + bx + c$:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

Si $\Delta < 0$:

$\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} > 0$ et donc $ax^2 + bx + c$ ne peut pas s'annuler.

Si $\Delta = 0$:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a}$$

Si $\Delta > 0$:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = 0 \Leftrightarrow a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow a\left[\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right] = 0 \Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = 0 \text{ ou } x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ou } x = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

On déduit directement le résultat suivant :

Théorème 4 : *Factorisation d'un trinôme du second degré*

Si $\Delta > 0$, $ax^2 + bx + c = \boldsymbol{a(x - x_1)(x - x_2)}$ où $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

Si $\Delta = 0$, $ax^2 + bx + c = \boldsymbol{a(x - x_0)^2}$ où $x_0 = -\frac{b}{2a}$

Si $\Delta < 0$: $ax^2 + bx + c$ ne peut pas s'écrire comme produit de deux polynômes de 1er degré.

Démonstration du théorème 4 : Ce résultat découle directement des écritures précédentes :

Si $\Delta > 0$:

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right] = a\left[\left(x - \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right)\left(x - \left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right)\right]$$

Si $\Delta = 0$:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = a\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2$$

Définition 3 :
Les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, si elles existent sont appelées les **racines** du trinôme $ax^2 + bx + c$.

Exemple 4 *: Factorisation du trinôme* $-3x^2 + 9x - 6$

On recherche d'abord les racines du trinôme $-3x^2 + 9x - 6$

$a = -3, b = 9$ et $c = -6$

$\Delta = b^2 - 4ac = 9^2 - 4 \times (-3) \times (-6) = 81 - 72 = 9 > 0$

Les racines sont $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-9 + 3}{2 \times (-3)} = \mathbf{1}$ et $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-9 - 3}{2 \times (-3)} = \mathbf{2}$

Ainsi la factorisation donne : $-3x^2 + 9x - 6 = -3(x - 1)(x - 2)$

3) Somme et produit des racines

Propriété 2 :
Soit le trinôme $ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des réels et $a \neq 0$.
Si le trinôme a pour racines x_1 et x_2, alors on a :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ et } x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$$

Démonstration de la propriété 2 : en exercice

Exemple 5 : Résoudre l'équation $2020x^2 - 2019x - 1 = 0$

Le calcul du discriminant est un peu lourd…

On remarque que 1 est une des solutions : en effet $2020 \times 1^2 - 2019 \times 1 - 1 = 0$

Le produit des racines $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{1}{2019}$

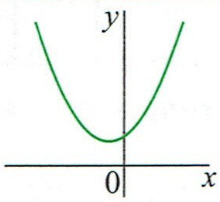
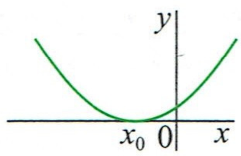
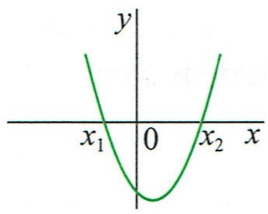
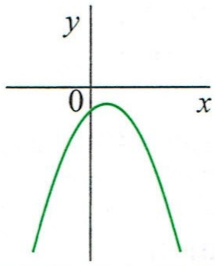
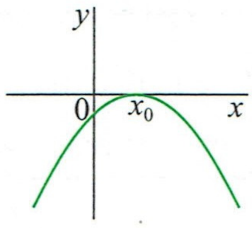
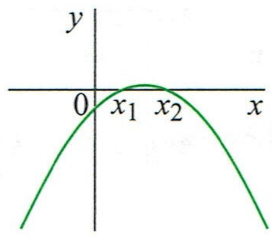
Comme l'une des racines est 1, l'autre est $-\frac{1}{2019}$

En effet, $x_1 \times x_2 = -\frac{1}{2019} \Leftrightarrow 1 \times x_2 = -\frac{1}{2019} \Leftrightarrow x_2 = -\frac{1}{2019}$

III - Signe d'un trinôme du second degré

> Théorème 5 :
> Soit f une fonction polynôme du second degré, définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des réels et $\boldsymbol{a \neq 0}$.
> Si $\Delta > 0$, alors f est du signe de a sur $]-\infty; x_1[\cup]x_2; +\infty[$ et du signe de $-a$ sur $]x_1; x_2[$ où x_1 et x_2 sont les racines de f **avec** $\boldsymbol{x_1 < x_2}$.
> Si $\Delta = 0$, alors f est du signe de a sur $\mathbb{R}\backslash\{x_0\}$ où x_0 est la racine double de f.
> Si $\Delta < 0$, alors f est du signe de a sur $\mathbb{R}$.

Bilan : Attention à l'ordre des racines x_1 et x_2 …

	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
	Solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$:		
	aucune	$x_0 = -\dfrac{b}{2a}$	$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ **et** $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
$a > 0$ **Parabole représentative**			
Signe de $ax^2 + bx + c$	x : $-\infty$ $+\infty$ $f(x)$: $+$	x : $-\infty$ x_0 $+\infty$ $f(x)$: $+$ 0 $+$	x : $-\infty$ x_1 x_2 $+\infty$ $f(x)$: $+$ 0 $-$ 0 $+$
$a < 0$ **Parabole représentative**			
Signe de $ax^2 + bx + c$	x : $-\infty$ $+\infty$ $f(x)$: $-$	x : $-\infty$ x_0 $+\infty$ $f(x)$: $-$ 0 $-$	x : $-\infty$ x_1 x_2 $+\infty$ $f(x)$: $-$ 0 $+$ 0 $-$

Exemple 6 : Donner le signe du trinôme $-2x^2 + 7x - 6$

$\Delta = b^2 - 4ac = 7^2 - 4 \times (-2) \times (-6) = 49 - 48 = 1 > 0$

Les racines sont $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-7+1}{2 \times (-2)} = \boldsymbol{\dfrac{3}{2}}$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-7-1}{2 \times (-3)} = \boldsymbol{2}$

Ainsi la fonction f est négative sur $]-\infty; \frac{3}{2}[\cup]2; +\infty[$ et positive sur $]\frac{3}{2}; 2[$.