Le produit scalaire - Corrigé

Exercice 1 :

1) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC = 4 \times (4+2) = 24$ car $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et de même sens.

2) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right) = 8 \times 5 \times \cos(60°) = 8 \times 5 \times \frac{1}{2} = 20$

3) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ par projection orthogonale

$= AB \times AD = 7 \times 3 = 21$ car $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires et de même sens.

4) On utilise la formule des normes avec la différence :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{CB}\|^2\right) = \frac{1}{2}(5^2 + 4^2 - 8^2)$$

$$= -\frac{23}{2}$$

5) On utilise la formule des normes avec la somme :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}\|^2 - \|\overrightarrow{AC}\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AD}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}\|^2 - \|\overrightarrow{AC}\|^2\right) = \frac{1}{2}(9^2 - 6^2 - 4^2) = \frac{29}{2}$$

6) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont pour coordonnées respectives $(-3; 1)$ et $(-5; -3)$, la formule des coordonnées est valable car le repère est orthonormé :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -3 \times (-5) + 1 \times (-3) = 12$

Exercice 2 :

1) $\overrightarrow{\mathrm{AM}}.\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0$ signifie que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ sont orthogonaux. L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{\mathrm{AM}}.\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0$ est donc la perpendiculaire en A à (AB) : $\boxed{\text{réponse } \mathbf{b}}$

2) $\mathbf{C}_1$ est le cercle de diamètre [AB] et $\mathbf{C}_2$ est le cercle de diamètre [AC]. Le point H, pied de la hauteur issue de A, est tel que ABH et ACH sont rectangles en H donc H appartient aux deux cercles : $\boxed{\text{réponse } \mathbf{c}}$

3) Pour tout point M, $\mathrm{MA}^2 - \mathrm{MB}^2 = \overrightarrow{\mathrm{MA}}^2 - \overrightarrow{\mathrm{MB}}^2 = \left(\overrightarrow{\mathrm{MA}} - \overrightarrow{\mathrm{MB}}\right).\left(\overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}}\right) = \overrightarrow{\mathrm{BA}}.\left(2\overrightarrow{\mathrm{MI}} + \underbrace{\overrightarrow{\mathrm{IA}} + \overrightarrow{\mathrm{IB}}}_{\vec{0}}\right)$

On obtient donc : $\boxed{\text{réponse } \mathbf{b}}$

Exercice 3 :

1) a) On utilise le théorème de Pythagore dans le triangle CDI rectangle en D :

$CI^2 = CD^2 + DI^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{5a^2}{4}$ donc $CI = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

CA est la diagonale d'un carré de côté a donc $CA = a\sqrt{2}$

b) On en déduit que : $\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{CA} = CI \times CA \times \cos\left(\overrightarrow{CI}, \overrightarrow{CA}\right) = \frac{a\sqrt{5}}{2} \times a\sqrt{2} \times \cos(\theta) = \frac{a^2\sqrt{10}}{2}\cos(\theta)$

2) a) $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DI} = \overrightarrow{CD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$.

b) Il faut impérativement déduire de la question précédente :

$$\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{CA} = \left(\overrightarrow{CD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}\right).\overrightarrow{CA} = \left(\overrightarrow{CD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}\right).\left(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB}\right) = CD^2 + \underbrace{\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CB}}_{\vec{0}} + \frac{1}{2}\underbrace{\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CD}}_{\vec{0}} + \frac{1}{2}CB^2 = \frac{3a^2}{2}$$

3) On égalise les deux expressions du produit scalaire $\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{CA}$:

$$\frac{a^2\sqrt{10}}{2}\cos(\theta) = \frac{3a^2}{2} \Leftrightarrow \cos(\theta) = \frac{3a^2}{2} \div \frac{a^2\sqrt{10}}{2} = \frac{3a^2}{2} \times \frac{2}{a^2\sqrt{10}} = \frac{3a^2}{a^2\sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

On en déduit bien que $\cos(\theta)$ et donc θ sont indépendants de la longueur a !